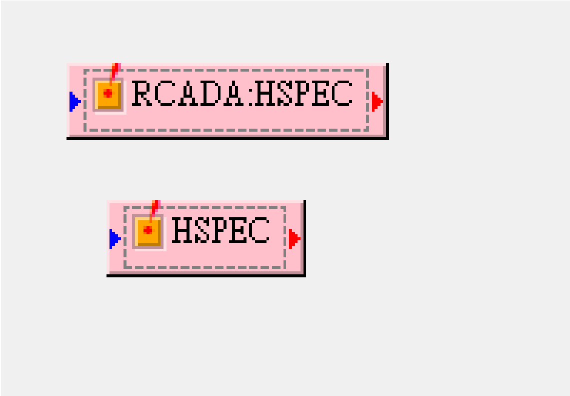
Visual Signal 技術文章專欄 ■ www.ancad.com.tw

2011 April. 13 NO.1

Hilbert Spectrum

與 RCADA Spectrum



“到底要用RCADA:HSPEC好還是HSPEC好????”

很多人對於Visual Signal中 (HHT)與RCADA Spectrum(NHHT)兩個相似的模組感到疑惑，此篇以簡單的章幅說明兩者的流程與差別，希望幫助使用者釐清困惑。

在訊號分析裡，我們可利用EMD(Empirical Mode Decomposition)將任何複雜的訊號分解成有限個IMF(Intrinsic Mode Function)的加總。這些IMF具有以下特性：

1. 上下包絡線對稱於 $x = 0$。
2. 極值與過零點數目相差在 1 以內。

依據上述特性，我們可以把IMF寫成以下的形式：

$$x(t) = A(t)\cos(\varphi(t))$$

也就是一個振幅隨時間變化的餘弦函數。

若我們同意IMF可以寫成上述的形式，接著便可以利用Hilbert Transform求出 $x(t)$ 的 Hilbert pair $y(t)$:

$$y(t) = H(x(t)) = \frac{1}{\pi} P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad = A(t)\sin(\varphi(t))$$ (P.V.為Cauchy Principle Value)

有了 $x(t)$ 與 $y(t)$ ，我們便可以利用兩者的關係，巧妙地算出振幅 $A(t)$ 與角變化 $\varphi(t)$ ，如下式：

$$A(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

$$\varphi(t) = \tan^{-1}\frac{y(t)}{x(t)}$$

而瞬時頻率，$\frac{d\varphi(t)}{dt}$ ，便由此定義，日後廣泛地被運用在通訊系統上。以上所述計算振幅與瞬時頻率的方法，被放在Visual Signal裡的Hilbert Spectrum模組中。

上面的方法看起來很完美，然 Bedrosian Theorem 說明了 Hilbert Transform 不能應用在所有求解 A(t)與 $\varphi(t)$ 的情況。Bedrosian Theorem 說當兩個函數各有不相重疊的頻譜時，

兩個函數乘積後的 Hilbert Transform 會等於低頻的函數乘上高頻函數的 Hilbert Transform，也就是

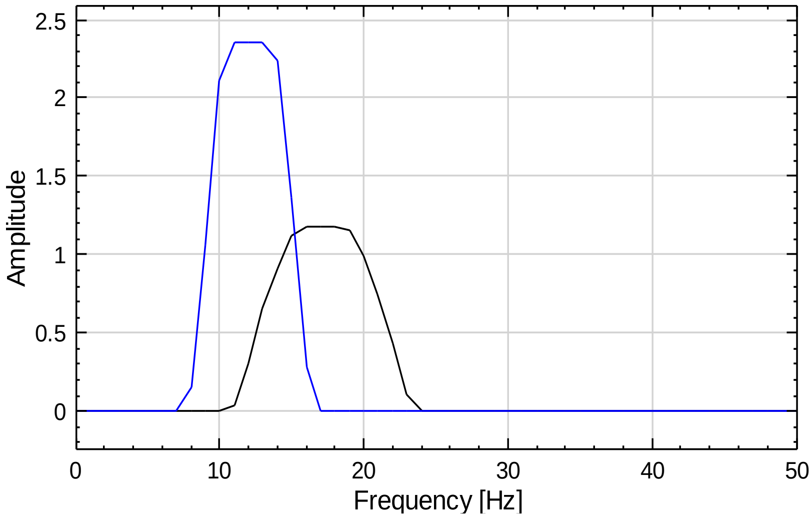
$$H(f_L(t)f_H(t)) = f_L(t)H(f_H(t))$$

其中 f_L 為低頻函數， f_H 為高頻函數。

運用在IMF的情況上時，如果訊號的振幅 $A(t)$ 的變化太快，以致 $A(t)$ 與 $\cos(\varphi(t))$ 的頻譜有重疊時(見圖一)，Hilbert Transform後的 $A(t)\cos(\varphi(t))$ 便不等於 $A(t)\sin(\varphi(t))$。而一旦振幅經由HT後不能維持原本的函數型態，我們也就不能利用前述的算式來求解振幅與瞬時頻率了。因此，黃鍔博士提出了NHHT(Normalized Hilbert Transform) 來避免上述無法計算振幅與瞬時頻率的窘境。NHHT的的想法是，在計算IMF的 Hilbert Transform 前，先找出其包絡線當作振幅 $A(t)$，接著將原IMF訊號除以 $A(t)$ 得到一正規化的函數 $\bar{x}(t)$:

$$\bar{x}(t) = \cos(\varphi(t))$$

當使用正規化後的IMF做 Hilbert Transform 時，便能確保 $\bar{x}(t)$ 的 Hilbert pair 為 $\sin(\varphi(t))$的形式，並繼續利用 $\varphi(t) = \tan^{-1}\frac{y(t)}{x(t)}$ 求得瞬時頻率 $\dot{\varphi}(t)$。這樣的方式避掉了 Bedrosian Theorem提到的不成立情況，且用更適應性的方式求到A(t)及 $\dot{\varphi}(t)$。NHHT 的方法被納在 Visual Signal 的 RCADA Spectrum 模組之中。



圖（1） 經過 FFT 後的 $f_L(t)$ 頻譜與 $f_H(t)$ 的頻譜重疊

以上便是 Hilbert Spectrum 與 RCADA Spectrum 的差別。Hilbert Spectrum忠於 Hilbert Transform 最原本振幅與瞬時頻率之解析解，而 RCADA Spectrum 中以適應性的方式找到訊號的振幅，再計算瞬時頻率。一般而言，當我們不了解訊號的內容時，NHHT 的適應性更幫助我們了解訊號，然而這種適應性的方式是否需要更穩固的數學基礎，就讓各位使用者及研究者來衡量並發掘了。