

【從連續到數位】

自然界的訊號大部分都是連續的，但在記錄時很難以連續的型態記錄下來，因此通常經由取樣的過程，將連續訊號轉為數位訊號，在電腦裡，可以被我們分析的都是數位化的。圖 1 中一個弦波的連續訊號，分別以 100Hz 和 33Hz 的頻率取樣，得到不同的數位訊號。

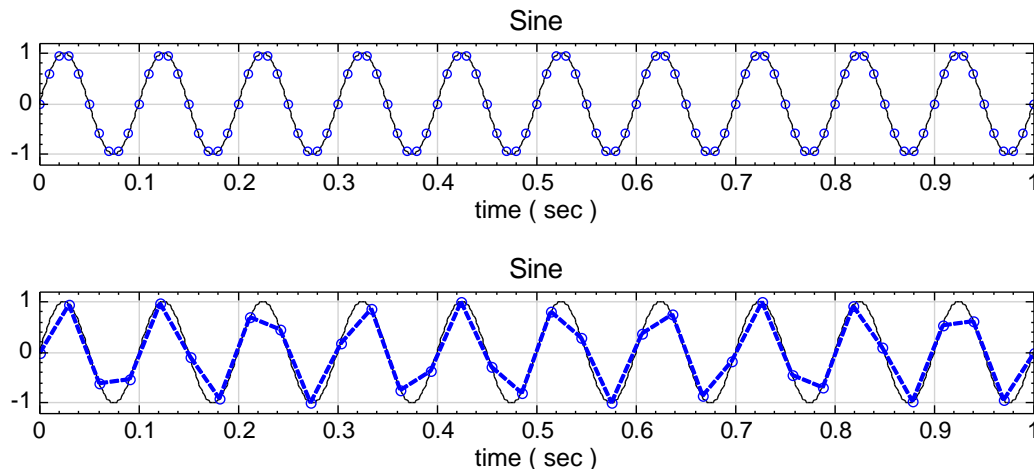


圖 1 頻率為 10Hz 的連續訊號，不同的取樣頻率。上圖的取樣率為 100Hz，下圖為 33Hz。黑線為原始訊號，藍色的點為取樣點，藍色的線為取樣點所連成的線。

圖 1 說明了取樣率的重要性，當取樣率太小時，取樣出來的訊號就會變形，不像原來的訊號；而當取樣率再更小時，取樣出來的數位訊號頻率會改變，如圖 2，原本為 20Hz 的頻率經由 15Hz 的取樣率，變為 5Hz 的訊號。(注意這邊 20Hz 和 5Hz 是訊號本身的頻率，一秒鐘上下震盪幾次；而 15Hz 是取樣頻率，表示一秒鐘取 15 個點) 也就是說，經由資料擷取的程序，我們得到了一個 5Hz 的訊號，可是它不是真的，事實上它只是因為取樣率不足而產生的『殘影』(aliasing)！

那麼取樣率要多少才夠、才不會讓原來的訊號失真呢？根據 Shannon 與 Nyquist 的取樣理論，如果連續訊號的最大頻率為 f_m ，取樣率 f_s 最小必須大於該頻率的兩倍，也就是 $f_s = 2 \cdot f_m$ 。意思是足夠大的取樣率所擷取的訊號，可以還原成原來的連續訊號而不會有訊息的扭曲。應用到我們於自然界中擷取訊號時，如果我們知道要研究的頻率範圍上限在哪邊，就知道要用多少的頻率來採樣，以保留所有的資訊，但是，還記得圖 2 的情況嗎？如果有雜訊高於取樣率 f_s ，那些雜訊會不會像圖六的狀況跑出一個假的殘影影響我們的分析結果？答案是肯定的，因此大多數的資料擷取器都會在擷取前先以類比的低通濾波器濾波。我們必須在擷取訊號前，先做類比的低通濾波，將高於取樣率 f_s 的頻率先行濾掉，這樣的設計稱為 anti-aliasing。保證被取

樣的連續訊號頻率低於取樣率 f_s 之後，就不用怕殘影現象影響我們的資料了。如果資料擷取設備沒有低通濾波，或 anti-aliasing 的設計，另一個方法是檢視一下所使用的感測器 (sensor)，通常感測器能夠接收的頻率都有一個上限，上限之上的頻率自動就被濾除了。

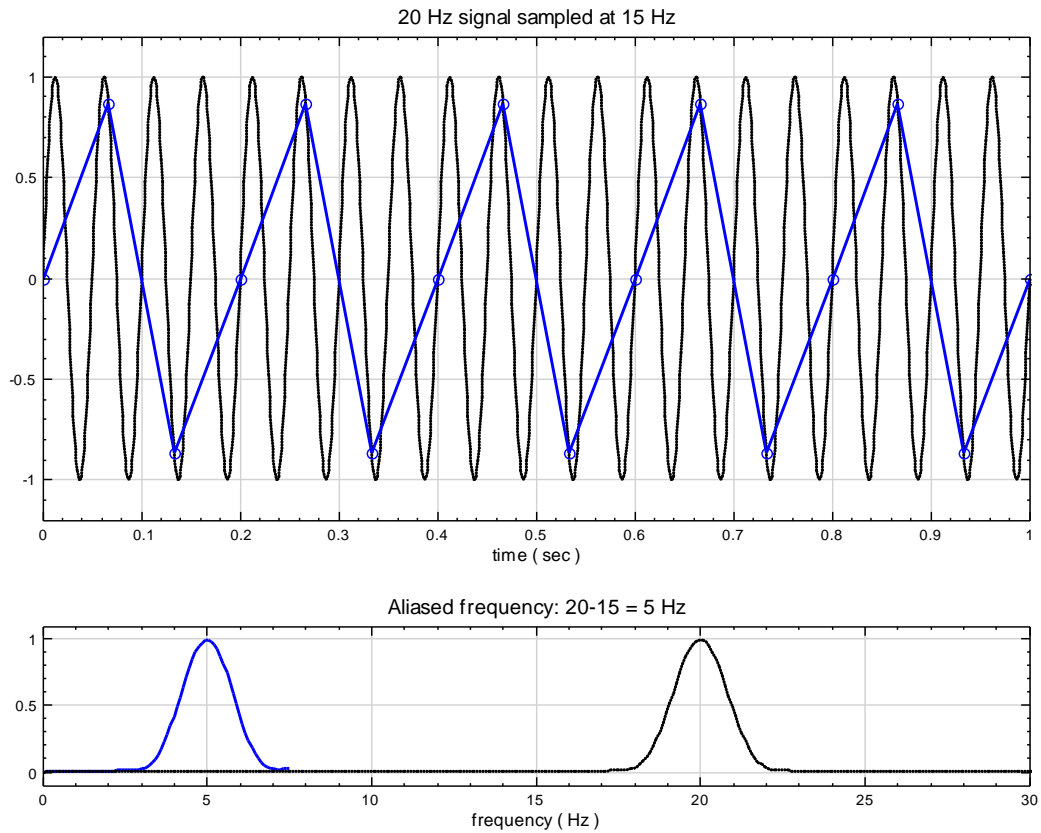


圖 2 殘影的例子。黑線為原始的連續訊號，頻率為 20Hz，取樣率為 15Hz，取樣後的訊號頻率變為 5Hz。

取樣理論的另一個面向是，如果取樣率 f_s 固定，可以看到的有意義的最高頻率為取樣率的一半，該頻率稱為 Nyquist Frequency $f_N = f_s/2$ 。在 Visual Signal 裡所有的頻率分析，都只顯示到 Nyquist Frequency，就是基於這道理。

殘影的現象，在變頻的訊號，用時頻分析可以看得最清楚，

圖 3 顯示，頻率跨越取樣率一半時，過高的頻率便反折了回來，這樣的現象可以幫助我們瞭解所使用的資料擷取儀器是否有反殘影的設計，或擷取到的訊號是否有殘影，實際的例子如圖 4。

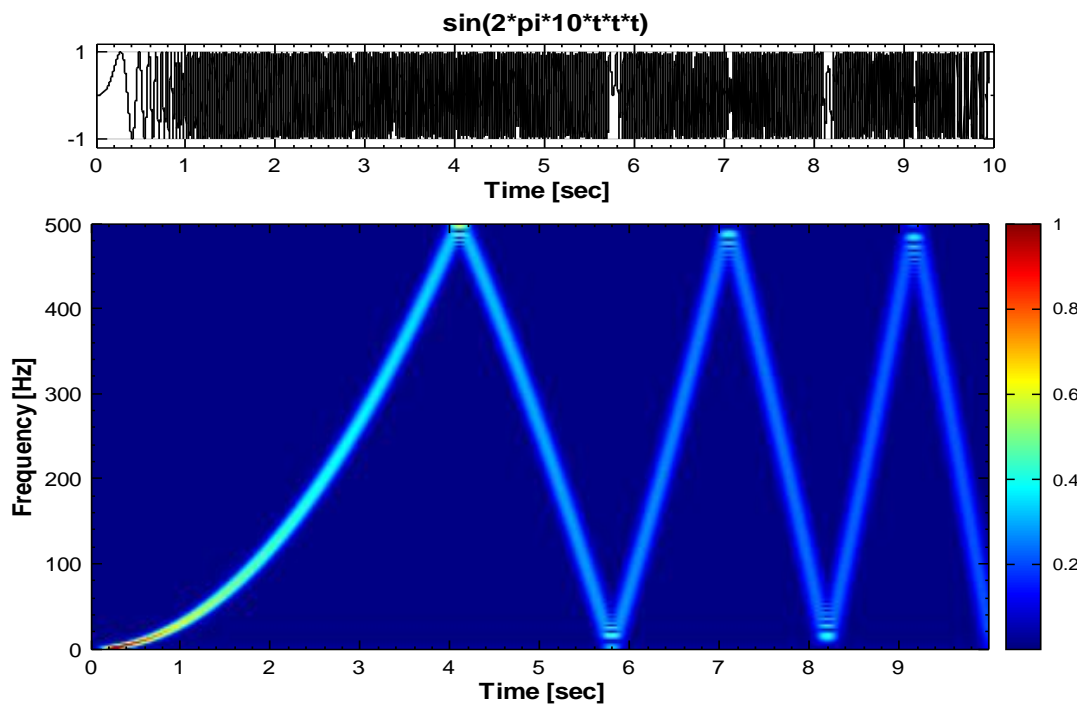


圖 3 變頻訊號的時頻圖。圖上為訊號源 $\sin(2\pi 10^3 t^2)$ 的時序列，取樣率 $f_s = 1000\text{Hz}$ 。圖下為該訊號的時頻圖：橫軸代表時間，縱軸是頻率，顏色代表頻率的震幅。

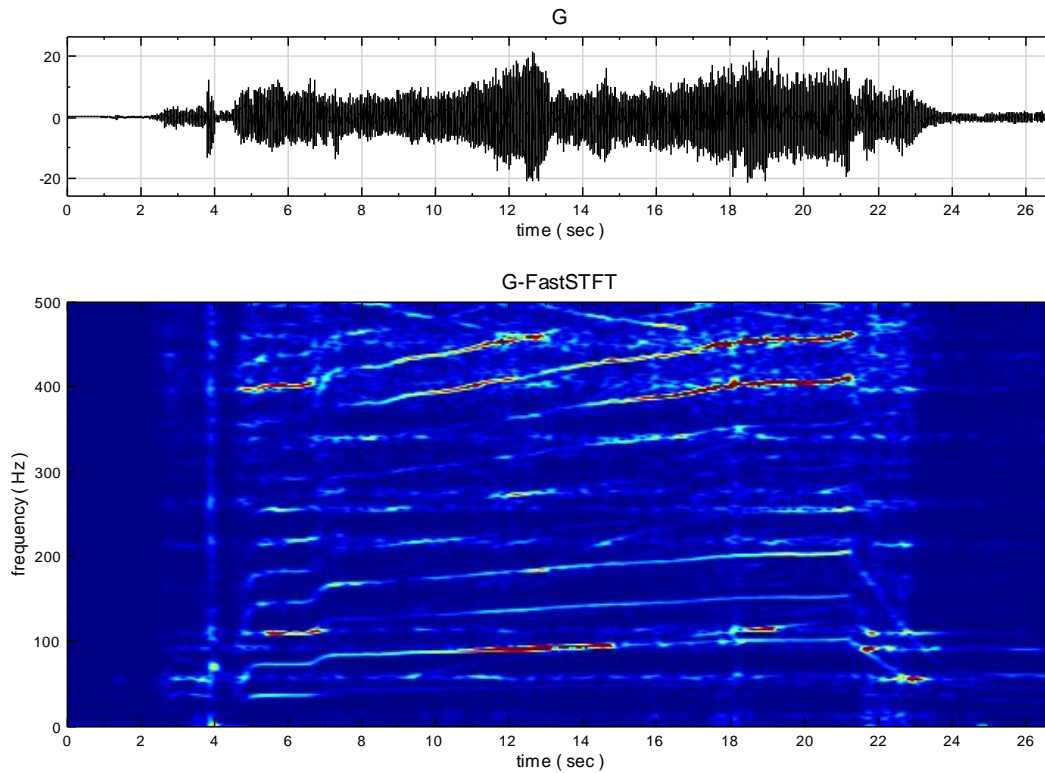


圖 4 振動訊號的時頻圖。在接近 Nyquist Frequency 的地方有明顯的反折現象，說明資料擷取設備沒有反殘影的設計。

雖然理論上取樣率超過兩倍的最大頻率即可，實務上這樣的取樣頻率仍嫌不夠，如

圖 3 所示，雖然頻率不會失真，但振幅的大小卻遠不及原來的訊號，如果連續訊號的波形或振幅是後續分析感興趣的部分，那麼取樣時選用的取樣率就必須大取樣離論所提的兩倍最大頻率 $2 \cdot f_m$ ，一般建議是連續訊號最高頻率的 20 倍。